# REDES COMPLEXAS E SUAS APLICAÇÕES

PAULO ALEXANDRE DE CASTRO[1,2,3], NILTON LUIS MOREIRA[1,2], PETRUS HENRIQUE RIBEIRO DOS ANJOS[1,2], RODRIGO FERREIRA MARINHO[2], ELITON DONIZETE DE SOUZA[2], RODRIGO PEDRA BRUM[4]

1. Departamento de Física,
Regional Catalão da Universidade Federal de Goiás
padecastro@gmail.com, nilton.lmoreira@gmail.com,
petrushenrique@gmail.com
2. Programa de Mestrado Profissional em Ensino de Física,
Regional Catalão da Universidade Federal de Goiás
padecastro@gmail.com, nilton.lmoreira@gmail.com,
petrushenrique@gmail.com, roferreira@gmail.com,
elitondsouza@yahoo.com.br
3. Programa de Mestrado Profissional em Gestão Organizacional, Regional Catalão da Universidade Federal de Goiás
padecastro@gmail.com
4. Faculdade de Informática e Administração Paulista - FIAP
rodrigo.pedra@gmail.com

**Recebido em: 28/10/2014 – Aprovado em: 05/11/2014 – Publicado em: 06/11/2014**

## RESUMO

Nos últimos anos, diversas questões levantadas pelo estudo empírico de redes reais tornaram-se acessíveis a tratamentos teóricos e computacionais. Iniciamos este trabalho, apresentando uma análise introdutória das Redes Complexas e mostramos uma aplicação prática: a análise da robustez da rede de distribuição elétrica brasileira. Isto é realizado por meio da comparação de propriedades estruturais da rede, tais como a distribuição de conectividade, diâmetro, coeficiente de agrupamento. Usamos esta análise para propor alternativas para as conexões da rede, o que pode contribuir para o aumento da robustez de projetos de manutenção e/ou expansão da rede, e melhorar a sua resistência contra apagões.

**PALAVRAS-CHAVE:** redes complexas, apagões, rede de destruição elétrica, falha, ataque.

## ABSTRACT

In recent years, many questions raised by the empirical study of real networks became accessible to theoretical and computational treatments. We start this work by presenting a introductory review of the Complex Networks and show a practical application: the analyzes of the robustness of the Brazilian electric distribution network. This is accomplished by comparing structural properties of the network, such as connectivity distribution, diameter, clustering coefficient. We use this analyzes to propose alternatives for the network connectivity, which may contribute to the increase of ro-

bustness in maintenance projects and/or expansion of the network, improving its endurance against blackouts.

**KEYWORDS :**.complex networks, blackouts, eletric distribution network, failure, attack.

## INTRODUÇÃO

Teoria dos grafos foi iniciada por Euler no século XVIII, com sua solução do célebre problema das pontes de Königsberg. Como teoria matemática, a teoria dos grafos se consolidou nas décadas e séculos seguintes. No entanto, foi apenas até um pouco mais de uma década atrás que uma explosão de pesquisa e aplicações ocorreu no que hoje é conhecido como ciência das redes. Em particular, a linguagem de grafos e redes se tornou um peça chave no estudo de sistemas complexos (MITCHELL, 2009), pois com sua linguagem de "nós e conexões" provou-se um modelo pictórico bastante intuitivo para modelar elementos de um sistema (nós) e suas interações (conexões). Por esta razão, tanto na ciência moderna, quanto na vida cotidiana, descrições sistemáticas de sistemas interagentes utilizando grandes e complexas redes estocásticas são bastante comuns, e tem atraído cada vez mais atenção (STROGRATZ, 2001). Nas últimas décadas, o grande esforço na solução de problemas inspirados pelo estudo empírico destas redes reais, como as redes sociais e redes de computadores, levou a uma intensa intersecção de ideias de campos distintos (como Grafos, Mecânica Estatística e Computação Científica) resultando numa nova área de pesquisa científica, que hoje chamamos ciência das redes complexas.

As redes complexas tem atraído bastante atenção especialmente pelo fato de diversas redes reais apresentarem propriedades topológicas não-triviais, propriedades estas que não ocorrem em redes regulares ou em grafos puramente aleatórios (DOROGOVTSEV e MENDES, 2003). Como consequência estas redes também apresentam comportamento não-usual e muitas vezes contra intuitivo; como os efeitos de "mundo pequeno", topologias livre de escala, modularidade, robustez, degenerescência, redundância e adaptabilidade; características que não poderiam ser reproduzidas pelas conectividades apresentadas por redes regulares ou em grafos puramente aleatórios. Mais ainda, do ponto de vista da mecânica estatística, redes complexas são exemplos de sistemas fora do equilíbrio que não obedecem as regras de "balanço detalhado" e exibem diversas características fascinantes não encontrada em sistemas no equilíbrio.

Neste trabalho, seguimos a classificação sugerida por NEWMAN (2003), que sugeriu a divisão das redes complexas em quatro categorias: redes sociais, de informação, tecnológicas e biológicas. Nossa intenção é fazer uma breve apresentação das características mais importantes dos diferentes tipos de redes.

- Redes Sociais: As pessoas fazem o papel de vértice e as interações entre elas são as ligações. As redes sociais seguramente estão entre as mais estudadas (ADAMIC e ADAR 2003).
- Redes de Informação: Também conhecidas como redes de conhecimento são obtidas de bases de conhecimento formal, como as citações de artigos científicos, a World Wide Web (ADAMIC e HUBERMAN, 2000), os registros de patentes, a estrutura das linguagens, etc.

- Redes Tecnológicas: Redes construídas pelo homem e desenvolvidas para distribuir algum bem de consumo ou algum recurso (SEN et al, 2003), tal como eletricidade e informação transmitida via Internet (BANAVAR et al, 1999).
- Redes Biológicas: O exemplo clássico (WEST et al, 1999) é a rede de proteínas de levedura (*yeast*), onde os vértices representam as proteínas e as ligações (dirigidas) representam a interação física entre duas proteínas.

## PROPRIEDADES DAS REDES

Uma definição para rede é: um conjunto de itens, que chamamos de nós (vértices), com ligações entre eles, chamadas de conexões (arestas). Nesta seção, mostraremos algumas propriedades básicas de uma rede, ignorando em um primeiro momento possíveis complicações. Em particular, ignoraremos direções ou pesos associados as conexões e também não consideraremos cores ou rótulos adicionados aos nós. Além disso, ficaremos restritos ao caso mais simples onde existe no máximo uma conexão entre o mesmo par de vértices, e um vértice não pode se conectar a ele mesmo (grafos simples). O número **máximo** de conexões de um grafo simples é $E = N(N-1)/2$, que em uma rede grande é muitas ordens de grandeza maior que o número típico de conexões nas redes reais de interesse nas quais $E = O(N)$.

Um exemplo destas redes simples são as chamadas redes regulares, nas quais cada nó tem exatamente o mesmo número de conexões. Por outro lado, é simples construir uma rede completamente não regular. De fato, dados $N$ vértices, podemos atribuir aleatoriamente conexões a cada vértices, construindo uma rede na qual cada uma das conexões possíveis tem probabilidade $p$ de ocorrer. Este é o chamado modelo de Erdös-Rényi (**ER**) (ERDÖS e RÉNYI, 1959), é fácil mostrar que nessas condições o número de ligações que conecta cada vértice, que chamamos de grau do vértice, segue uma distribuição binomial,

$$P(k) = \binom{N-1}{k} p^k (1-p)^{n-1-k}.$$

Para um grande número de vértices, essa distribuição tende a distribuição de Poisson:

$$P(k) \to \frac{(Np)^k e^{-Np}}{k!}, \qquad (1)$$

com $Np = constante$ e $N \to \infty$. As distribuições de conectividades de redes aleatórias, como a de ER, tem uma distribuição "em forma de sino" (análoga à distribuição normal no caso contínuo). Essa distribuição tem algumas características marcantes, seu pico é pronunciado, indicando que a maioria dos vértices têm, em média, o mesmo número de ligações. Nos extremos desta distribuição estão representados os vértices raros, com conectividade muito baixa ou com conectividade muito alta . Por outro lado, estudos empíricos (NEWMAN et al, 2001) apontam que redes reais têm um comportamento muito diferente, com uma distribuição com "cauda pesada" caracterizada pelo decaimento na forma de uma lei de potências

$$P(k) \to \frac{1}{\zeta(\gamma)} k^{-\gamma}, \qquad (2)$$

onde $\gamma$ é uma constante e $\zeta(\gamma)$é a função zeta de Riemann. Em tais distribuições existem muitos itens com valores pequenos e alguns poucos itens com valores enormes. A “cauda pesada” da distribuição refere-se ao fato de um número pequeno, mas não insignificante de itens na distribuição assumir valores extremamente grandes em relação à média. Em outras palavras, redes reais parecem conter muitos nós com grau muito pequeno, mas também um pequeno número de nós (ou “*hubs*”) com um grau muito elevado. A presença de uma lei de potência sugere que as redes reais seriam um fenômeno críticos, apresentando transição de fase (topológica) análoga a diversos fenômenos descritos pela física estatística, que exibem uma transição de fase entre estados ordenados e aleatórios ou vice-versa. Na transição, esse sistemas podem apresentar as propriedades de “auto-similaridade”, “fractalidade” ou “de escala livre”[1]

O fato de que muitas redes do mundo real apresentarem distribuições de conectividade do tipo “cauda pesada”, é uma forte evidência que os mecanismos para a geração destas redes devem ser capazes de gerar nós com estas distribuições de conectividade (NEWMAN et al, 2001)[2]. Esta é a motivação para os modelos de conexão preferencial como os propostas em (BARABÁSI e ALBERT, 1999). O modelo Barabási-Albert (**BA**) fornece um algoritmo para construção de redes livres de escala, a partir de dois ingredientes principais: crescimento e o mecanismo de conexão preferencial. A grosso modo, isso significa que novos nós tendem se ligar a nós com um alto grau. Por exemplo, uma nova página da web irá adicionar hiperlinks para páginas populares da web que já têm um alto grau. O algoritmo utilizado no modelo de BA é o seguinte: Começando com um pequeno número ($N_0$) de nós conectados, adiciona-se um novo nó com $k_0 < N_0$ arestas que ligam o novo nó para os $N_0$ nós diferentes já presentes na rede. Ao escolher os nós aos quais o novo nó se conecta, assumimos que a probabilidade $p_i$ de que um novo nó será conectado ao *i*-ésimo nó depende de $k_i$, o grau de nó *i*, de tal forma que:

$$p_i = \frac{k_i}{\sum_i k_i} \qquad (3)$$

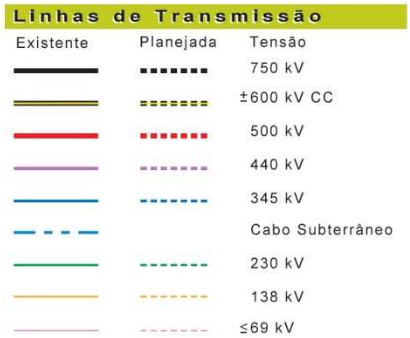
## REDE DE DISTRIBUIÇÃO DE ENERGIA ELÉTRICA DO BRASIL

Estudamos a rede de distribuição de energia elétrica do Brasil (**DEEB**), como podemos ver na figura 1a. A partir de uma perspectiva de redes complexas, onde associamos as estações e subestações com vértices de uma rede e as ligações entre os vértices representam as linhas de transmissão. Fizemos também um estudo comparativo com os modelos mais conhecidos, como o **ER**, **Modelo de Configuração** (BENDER e CANFIELD, 1978) e **BA** (BARABÁSI e ALBERT, 2002), e comparamos com os resultados obtidos em redes de distribuição elétricas reais. Fizemos essa análise comparativa fazendo uso das seguintes grandezas: distribuição de conectividades; diâmetro; coeficiente de agrupamento, que são frequentemente utilizadas nos estudos das redes complexas. Na Figura 3(a), vemos a rede **DEEB**.

[1] O termo “de escala livre” se refere a qualquer forma funcional $f(x)$ que permaneça inalterada na presença de um fator multiplicativo, i.e. $f(ax) = b \cdot f(x)$ (onde a e b são constantes). É fácil mostrar que apenas as leis de potência respeitam essa condição, de forma que os termos “lei de potência” e “de escala livre” são equivalentes. Distribuição do tipo lei de potência são por vezes confundidas com as leis de Pareto ou de Zipf.

[2] Contudo, é possível gerar de maneira relativamente simples grafos aleatórios em que a distribuição de conectividades $P(k)$ assuma a forma desejada, este é o chamado modelo de configuração.

(a) Mapa da distribuição das linhas de alta tensão em todo o território nacional




(b) Informações das linhas de transmissões (existentes e a serem construídas) por todo o Brasil.

**FIGURA 1**. *Linhas de altas tensões do Brasil. Fonte: www.ons.org.br*

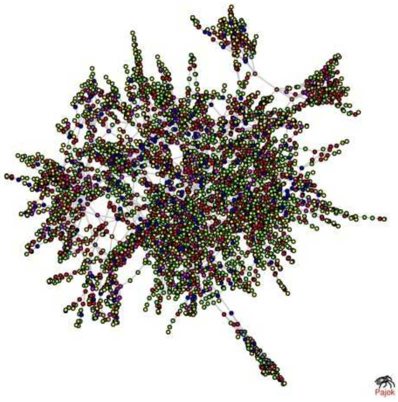
## ANÁLISE ESTRUTURAL DA DEEB

Para os fins desta análise, os dados referentes a rede **DEEB** podem ser comparados com dados da rede de distribuição de energia elétrica dos Estados Unidos da América **DEEUA** veja a Figura 2(a) e a referência (ALBERT et al, 2004) para maiores detalhes. Verificamos que a probabilidade, $P(k)$, de que uma estação (ou subestação) tenha $k$ linhas de transmissão decai exponencialmente (veja Figura 2(b)), da seguinte forma,

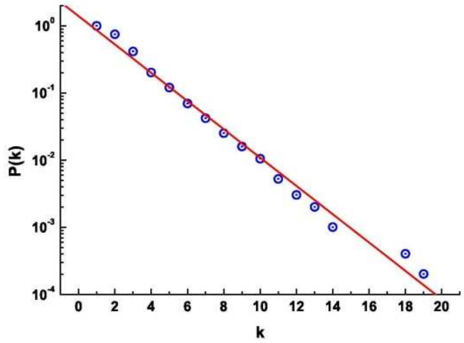
$$P(k) \sim \exp(-k/\gamma_{EUA}), \qquad (4)$$

com $\gamma_{EUA} \cong 2$. A forma funcional da Equação (4)) mostra que a **DEEUA** é uma rede de escala única e a probabilidade de se encontrar vértices de alta conectividade em redes de escala única é menor do que em redes de escala livre. Analogamente, na Figura 3(b), vemos que a distribuição de conectividade da rede **DEEB** decai exponencialmente com $k$, de forma similar a rede **DEEUA**.

Vemos a distribuição de conectividade da rede construída com o modelo de configuração (Fig. 4(a)). No gráfico seguinte, Fig. 4(b),vemos a distribuição de conectividade da rede construída com o modelo Erdös-Rényi.

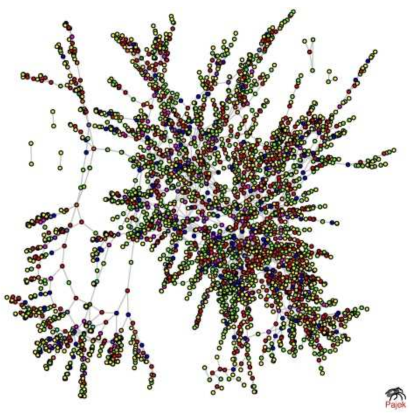



(a) Rede complexa do sistema de distribuição de energia elétrica dos EUA. Fonte: http://pajek.imfm.si/doku.php?id=download

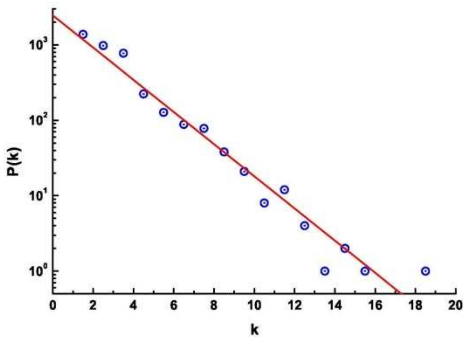



(b) Distribuição de conectividade do sistema de distribuição elétrica dos Estados Unidos da América. Fonte: próprio autor.

**FIGURA 2.** Rede complexa DEEUA.

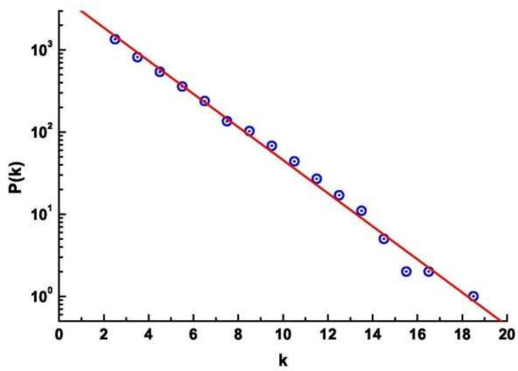



(a) Rede do sistema de distribuição de energia elétrica do Brasil (DEEB). Fonte: próprio autor.

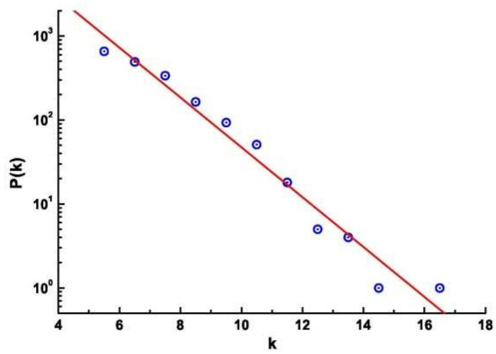



(b) Distribuição de conectividade do sistema de distribuição elétrica do Brasil (DEEB). Fonte: próprio autor.

**FIGURA 3**. Rede complexa DEEB..




(a) Distribuição de conectividade da rede construída com o modelo de configuração. Fonte: próprio autor.




(b) Distribuição de conectividade da rede construída com o modelo Erdös-Rényi. Fonte: próprio autor.

**FIGURA 4.** Rede complexa DEEB.

Das redes **DEEB** (real), ER (simulação) e de **configuração** (simulação), extraímos algumas grandezas (veja Tabela 1). Em associação com os resultados obtidos (que geraram as dados para construir as Figuras 3(a), 4(a) e 4(b)), podemos concluir que as distribuições de conectividades, de todas as três redes, decaem exponencialmente.

**TABELA 1:** *Na primeira coluna, **v** é o número de vértices, **e** é o número de ligações, **<k>** é a conectividade média, **C** é o coeficiente de agrupamento e **D** é comprimento médio do menor caminho.*

| | DEEB | Erdös-Rényi | Configuration |
|---|---|---|---|
| ***V*** | 3732 | 3436 | 3732 |
| ***E*** | 4540 | 4558 | 7087 |
| **<*k*>** | 2,43 | 2,44 | 3,81 |
| ***C*** | $3,88 \times 10^{-2}$ | $9,19 \times 10^{-5}$ | $8,75 \times 10^{-4}$ |
| ***D*** | 16,97 | 8,97 | 6,26 |

## TOLERÂNCIA ESTÁTICA À ERROS E ATAQUES

A abordagem tradicional para analisar a tolerância estática à erros e ataques buscam relação entre a deleção dos vértices e a conectividade total. Uma simulação de erro poderia se basear na deleção aleatória de vértices enquanto uma simulação de ataque poderia se basear na deleção (em ordem decrescente) dos vértices mais conectados. As verificações experimentais referentes a tolerância, da rede **DEEB**, à erros e ataques estão na Figura 5. Nela vemos que, quando a rede está sujeita a erros a simulação apresenta um decrescimento monótono da componente gigante $S$ da rede com o aumento da fração $f$ de vértices retirados (triângulos). No caso da simulação da rede **DEEB** ser submetida a um ataque (a remoção seletiva dos vértices mais conectados (círculos)) vemos que o tamanho da componente gigante $S$ é consideravelmente maior do que quando comparado com o caso de erros aleatórios na rede **DEEB**, para uma mesma fração $f$ de vértices retirados.

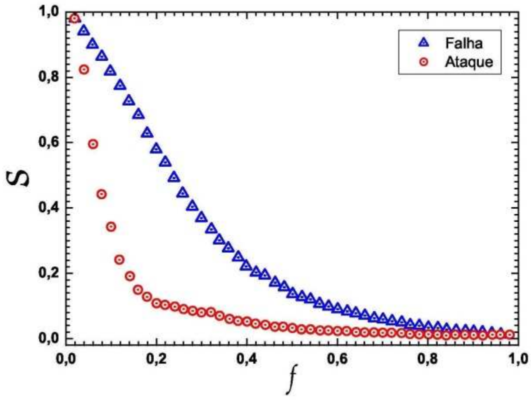



**FIGURA 5.** *Tolerância à remoção aleatória (triângulo) e seletiva (círculo) de uma fração $f$ de vértices, medidos pelo tamanho relativo $S$ da maior componente conectada (com um $f_c = 0.72$ analítico, para o caso aleatório).*

Para corroborar resultados numéricos de redes de distribuição elétrica (ALBERT et al, 2000), uma abordagem analítica foi proposta para estudar tolerância a erros e ataques em redes baseada na teoria da percolação (STAUFFER e AHARONY, 1992). A rede percola abaixo de uma probabilidade crítica $f_c$ referente a presença ou ausência de um número de ligações. Para o caso de tolerância a erros, veja a referência (MOLLOY e REED, 1998), a condição para a existência de uma componente gigante $S$ em uma rede é

$$\langle k^2 \rangle - 2\langle k \rangle = \sum_k k(k-2)P(k) > 0.$$

Para vértices aleatoriamente removidos, a fração crítica $f_c$ é dada por

$$f_c = 1 - \frac{\langle k \rangle}{\langle k^2 \rangle - \langle k \rangle} .$$

Considerando a distribuição de conectividade exponencial da rede de distribuição elétrica do Brasil, nós temos que $\langle k \rangle = \gamma$ e $\langle k^2 \rangle = 2\gamma^2$, e então

$$f_c = 1 - \frac{1}{2\gamma - 1} .$$

Para $\gamma_{Brasil} = 2{,}29$, o valor previsto para a fração de vértice aleatórios, $f_c$ , é de $0{,}72$.

A noção de que, somente as redes reais que apresentam distribuição de conectividades decaindo segundo uma lei de potência são robustas para perda aleatória de vértices (erro) e extremamente frágil com relação a perda seletiva dos vértices mais conectados (ataque) é equivocada. Nosso trabalho mostra que redes de escala única (como é o caso rede **DEEB**), com distribuição de conectividade decaindo exponencialmente, possui comportamento semelhante com relação a tolerância a erros e ataques.

Uma proposta para tornar a rede **DEEB** mais robustas seria reorganizar o sistema de distribuição de energia elétrica de tal forma a permitir a separação intencional de vértices (estações/subestações) dentro de ilhas. Uma segunda proposta seria aumentar a redundância da rede, que consiste em aumentar o número de ligações entre dois vértices.

## CONCLUSÕES

Neste artigo nós analisamos algumas ideias recentes sobre a estrutura e função dos sistemas em rede. A grande quantidade de pesquisas nesta área tem sido motivada pela capacidade de realizar experimentos que acessam dados de redes reais, como a Internet, a *World Wide Web*, redes sociais, redes de colaboração, redes de citação, e uma variedade de redes biológicas. Nestas redes as interações não são nem inteiramente causais e nem inteiramente aleatórias, levando a emergência de diversos fenômenos novos como “mundo pequeno”, “auto-similaridade”, estrutura de comunidade, “navegabilidade”. Diversos modelos de rede têm sido propostos a fim de explicar por que estas redes exibem estes comportamentos ou a fim de prever os efeitos esperados de uma estrutura de rede. Neste trabalho em particular, mostramos uma aplicação destas ideias no problema de classificação de uma rede **DEEB**.

Mostramos que a rede **DEEB** é uma rede de escala única, com um comportamento bastante distinto do modelo **BA**, **ER** ou configuração. Além disto, analisamos a capacidade desta rede em resistir à erros e ataques, e mostramos que a rede **DEEB** é uma rede bastante robusta. Este resultado é contrário da noção tradicional de que apenas redes do tipo “ligação preferencial” são robustas para perda aleatória de vértices (erro) e frágeis com relação a perda seletiva dos vértices mais conectados (ataque).

O estudo de redes complexas ainda está em sua infância e várias questões ainda demandam respostas claras. Ainda começamos a compreender alguns dos padrões e regularidades estatísticas na estrutura de redes do mundo real e as técnicas de análise de redes são não mais do que um apanhado de ferramentas, em grande parte não relacionadas. Análises como a da referência (ONODY e DE CASTRO, 2004) ou a da rede **DEEB** sugerem que ainda faltam mecanismos sistemático para a caracterização de estrutura de rede e de suas propriedades. Compreender quais propriedades estruturais das redes são realmente importantes, certamente dependerá das ferramentas disponíveis, mas sobretudo, de quais perguntas estamos interessados em responder sobre uma rede particular. Tais respostas poderão nos dar uma nova visão sobre uma vasta gama de fenômenos complexos e, anteriormente, pouco compreendidos.

## AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem a Universidade Federal de Goiás (UFG); a Fundação de Apoio a Pesquisa de Goiás (FAPEG) e também à Fundação de Apoio à Pesquisa (FUNAPE), pela parceria, apoio e suporte financeiro ao Programa de Mestrado Profissional em Gestão Organizacional da Universidade Federal de Goiás.

## REFERÊNCIAS

FILHO, E. L. M. **Manual de Redação e Estilo**, Maltese, 1992.

HUANG, H. S.; Lu, C. N. **Efficient Storage Scheme and Algorithms for W-matrix Vector Multiplication on Vector Computers**. IEEE Transactions on Power Systems, Vol.9, No. 2; pp. 1083- 1094, 1994.

LIN, S. L.; Van Ness J. E. **Parallel Solution of Sparse Algebraic Equations**. IEEE Transactions on Power Systems, Vol.9, No. 2, pp. 743- 799, 1994

MARQUADT, D. W. **An Algorithm for Least-squares Estimation of Nonlinear Parameter** - J. Soc. Indust. Appl. Math., vol. 11, n° 2, pp. 431-441, 1963.

MONTICELLI, A. **Fluxo de Carga em Redes de Energia Elétrica**. Edgar Blucher, Rio de Janeiro – RJ, 1983.

MORELATO, A.; AMARO, M.; KOKAI, Y. **Combining Direct and Inverse Factors for Solving Sparse Network Equations in Parallel**. IEEE Transactions on Power Systems, Vol. 9, No. 4, pp. 1942- 1948, 1994.

ADAMIC, L. A.; ADAR, E. **Friends and neighbors on the Web.** Social Networks}, 25(3):211-230, 2003.

ADAMIC, L. A.; HUBERMAN, B. A. **Power-law distribution of the world wide web.** Science, 287:2115, 2000.

ALBERT, R.; ALBERT, I.; NAKARADO, G. L. **Structural vulnerability of the north american power grid**. Physical Review E, 69:025103(R). 2004.

ALBERT, R.; JEONG, H.; BARABASI, A.-L. **Error and attack tolerance of complex networks**. Nature, 406:378-382, 2000.

BANAVAR, J.R.; MARITAN, A.; RINALDO, A. **Size and form in efficient transportation networks**. Nature, 399:130-132, 1999.

BARABÁSI, A.-L.; ALBERT, R. **Emergence of scaling in random networks**. Science, 286:509—512, 1999

BARABÁSI, A.-L.; ALBERT, R. **Statistical mechanics of complex networks**. Review of Modern Physics, 74:47-97, 2002.

BENDER, E. A.; CANFIELD, E. R. **The asymptotic number of labelled graphs with given degree sequences**.

Journal of Combinatorial Theory A, 24:296-307, 1978.

DOROGOVTSEV, S. N.; MENDES, J. F. F. **Evolution of Networks: From Biology Nets to the Internet and WWW**. Oxford University Press, 2003.

ERDÖS, P.; RÉNYI, A. **On random graphs I**. Publicationes Mathematicae}, 6:290-297, 1959.

MITCHELL, M. **Complexity: A Guided Tour**. Oxford University Press, 2009.

MOLLOY, M.; REED, B. **The size of the giant component of a random graph with a given degree sequence**.

Comb. Prob. Comput., 7:295-305, 1998.

NEWMAN, M. E .J. **The structure and function of complex networks**. SIAM Review, 45:167-256, 2003.

NEWMAN, M. E. J.; STROGATZ, S. H.; WATTS, D. J. **Random graphs with arbitrary degree distributions and their applications**. Physical Review E 64, 64:026118, 2001.

ONODY, R. N.; DE CASTRO, P. A. **Complex network study of brazilian soccer players**. Physical Review E, 70:037103, 2004.

SEN, P.; DASGUPTA, S.; CHATTERJEE, A.; SREERAM, P. A.; MUKHERJEE, G.; MANNA, S. S. **Small-world properties of the indian railway network**. Physical Review E, 67:036106, 2003.

STAUFFER, D.; AHARONY, A. **Introduction to Percolation Theory**. Taylor & Francis, London, 1992.

STROGATZ, S. H. **Exploring complex networks**. Nature, 410:268-276, 2001.

WEST, G. B.; BROWN, J. H.; ENQUIST, B. J. **A general model for the structure, and allometry of plant vascular systems.** Nature, 400:664-667, 1999.