Centro Científico Conhecer

Enciclopédia Biosfera

MODELAGEM MATEMÁTICA APLICADA ÀS ATIVIDADES AGROINDUSTRIAIS

Crysthian Roberto Macedo da Silva[1], Tiago Rodrigues Pereira[2], Antônio Tássio Santana Ormond[3], Kássio dos Santos Carvalho[4] e Neiva Sales Rodrigues[5].

[1] Mestrando do Programa de Pós-Graduação em Recursos Hídricos da Universidade Federal de Mato Grosso-UFMT, Cuiabá-MT, Brasil. (roberto.silva0@uol.com.br)

[2] Licenciado em Matemática pela Universidade Federal de Mato Grosso-UFMT, Rondonópolis-MT, Brasil.

[3, 4] Mestrandos do Programa de Pós Graduação em Engenharia Agrícola e Ambiental da Universidade Federal de Mato Grosso.

[5] Mestranda do Programa de Pós-Graduação em Recursos Hídricos da Universidade Federal de Mato Grosso-UFMT.Brasil.

Recebido em: 06/05/2013 – Aprovado em: 17/06/2013 – Publicado em: 01/07/2013

RESUMO

A modelagem matemática veio como um método para auxilio na determinação dos pontos máximos e mínimos da produtividade de uma empresa. A programação linear foi um método desenvolvido para a busca da otimização de um determinado problema através de cálculos matemáticos de sistemas lineares com variadas variáveis. Pode ser resolvido através de computadores devido ao tamanho das equações e processos de busca dos valores ótimos. A metodologia consiste na atribuição de uma função objetivo sujeitando a criação da forma canônica das variáveis pelos valores, através do uso da equação diferencial ordinária (E. D. O) e de matrizes. No trabalho foram resolvidas duas questões pertinentes ao sistema agroindustrial, o problema do tanque de água e da cooperativa agrícola que no final foi elaborada a definição para maximização e minimização da produtividade/custo. Um bom sistema matemático aliado ao planejamento eficiente torna o uso da modelagem matemática uma das ferramentas eficazes para a otimização econômica.

PALAVRAS-CHAVES: Otimização, Modelagem, Programação Linear.

MODELING APPLIED MATHEMATICS AGRO-INDUSTRIAL ACTIVITIES

ABSTRACT

The mathematical modeling came as a method to aid in determining the maximum and minimum points of the productivity of a company. Linear programming is a method developed to search for a particular optimization problem through mathematical calculations of linear systems with different variables. Can be solved by computers because of the size of the search processes and equations of optimum values. The methodology consists in assigning an objective function subject to creation of canonical variables by values, through the use of ordinary differential equation (the ED) and matrices. At work were resolved 2 issues relevant to the agribusiness system, the problem of the water tank and the agricultural cooperative in the end was elaborated definition for minimization and maximization of productivity / cost. A good mathematical system combined with efficient planning makes use of mathematical modeling of the effective tools for economic optimization.

KEYWORDS: Optimization, Modeling, Linear Programming.

INTRODUÇÃO

O final da década de 1970 marcou o início da trajetória da Modelagem Matemática na educação matemática brasileira, em oposição, segundo a pesquisadora Lourdes Maria Werle de Almeida, ao Movimento da Matemática Moderna, como uma alternativa de se fazer matemática nas aulas de matemática e em outros espaços, e contrária à ideologia da certeza (MEYER, et al., 2011).

Segundo ALMEIDA & PALHARINI (2012) uma atividade de Modelagem Matemática origina-se em uma situação problemática e tem como característica essencial à possibilidade de abarcar a cotidianidade ou a relação com aspectos externos à Matemática

A utilização de modelos de otimização linear para representar tal processo pode resultar em um poderoso instrumento para análise de decisões táticas e operacionais (MUNHOZ & MURABITO, 2010).

A programação linear é um método que busca a otimização de um determinado problema que possui muitas soluções possíveis, através da maximização ou minimização de uma função linear (PUCCINI & PIZZOLATO, 1987). A tendência para o desenvolvimento de novas estratégias matemáticas para otimização tem levado à comparação e combinação das técnicas disponíveis (SILVA, 1999).

A utilização de modelos de programação linear para representar tal processo pode resultar em um poderoso instrumento para análise de decisões táticas e operacionais, conforme observado, por exemplo, em MUNHOZ (2000 e 2009).

A incorporação de incertezas a determinados parâmetros do modelo conduz a uma representação melhor da realidade, sendo a aplicação da abordagem de otimização robusta uma solução técnica e computacional atrativa por manter o modelo como um problema de programação linear, porém robusto (MUNHOZ & MURABITO, 2012).

A formulação do problema a ser resolvido por programação linear, deve-se definir o objetivo básico do problema (função objetivo), que a princípio deve ser único, com respeito á otimização a ser procurada, geralmente maximização de lucro ou eficiência, ou minimização de custos, tempo ou perdas.

No trabalho de ALBUQUERQUE et al., (2009) estudos de planejamento da expansão de longo prazo de sistemas de produção de energia elétrica onde, a função-objetivo é minimizar o valor presente do custo total da expansão do sistema como um todo, de forma que a indicação de ampliação da oferta de energia (ou de ponta) em um subsistema poderá vir a ser feita tanto por indicação de ampliação de geração no subsistema, como por indicação de ampliação dos troncos de transmissão, se esta for solução mais econômica.

O problema que o pesquisador em alimentos enfrenta é a multiplicidade de respostas (por exemplo, funcionais, sensoriais e nutricionais) que requerem um tratamento conjunto. A abordagem eficiente desse problema exige a sistematização de técnicas, que empregam computador, que permitam o julgamento da importância das respostas como auxílio à tomada de decisão, particularmente da solução ótima (SILVA, et al., 2000).

O objetivo deste trabalho foi utilizar a programação linear para a resolução de dois problemas típicos na agroindústria: O Problema do tanque de água e o problema da cooperativa agrícola.

MATERIAL E METODOS

A programação linear nada mais é que um aprimoramento de uma técnica de resolução de sistemas de equações lineares via inversões sucessivas de matrizes, com a vantagem de incorporar uma equação linear adicional representativa de um dado comportamento que deva ser otimizado.

Deve-se definir o objetivo básico do problema (função objetivo), que a princípio deve ser único, com respeito a otimização a ser procurada, geralmente maximização de lucro ou eficiência, ou minimização de custos, tempo ou perdas.

Por exemplo: limitações referentes a área, água ou recurso disponível, as exigências nutricionais de animais entre outros.

A forma padrão de um problema de programação linear é:

Min. $Z = C^t . X$ Max. $Z = C^t . X$

Sujeito a: $\begin{cases} \mathbf{AX} \geq \mathbf{b} \\ \mathbf{X} \geq \mathbf{0} \end{cases}$ ou sujeito a: $\begin{cases} \mathbf{AX} \leq \mathbf{b} \\ \mathbf{X} \geq \mathbf{0} \end{cases}$

Forma canônica:

Um problema de programação linear na forma canônica é:

Min. $Z = C^t . X$ Max. $Z = C^t . X$

Sujeito a: $\begin{cases} \mathbf{AX} = \mathbf{b} \\ \mathbf{X} \geq \mathbf{0} \end{cases}$ ou sujeito a: $\begin{cases} \mathbf{AX} = \mathbf{b} \\ \mathbf{X} \geq \mathbf{0} \end{cases}$

Dada uma função f: $R^n \rightarrow R$, o vetor gradiente de f é:

$$\nabla \mathbf{f} = \left(\frac{\delta f}{\delta x1}, \ldots, \frac{\delta f}{\delta x}\right)$$

Se n=2 temos $\nabla \mathbf{f} = \left(\frac{\delta f}{\delta x}, \frac{\delta f}{\delta y}\right)$

O vetor gradiente tem uma propriedade especial, pois sua direção e sentido apontam para o maior crescimento da função, isto é, a função f cresce segundo o vetor gradiente ∇**f.**

A função f decresce segundo o vetor oposto **-**∇**f.**

Essa informação é relevante, pois deseja-se maximizar ou minimizar nossas funções objetivas pelo método simplex.

Modelo geral da programação linear

O modelo geral da programação linear pode ser escrito como:

(Max) ou (Min) **Z** = cx + cx +...+cx

Sujeito a:

$a_{11}x_1 + a_{1\,2}x_2 + ... + a_1 x_n \leq b_1$

$a_{2\,1}x_1 + a_{2\,2}x_2 + ... + a_2 x_n \leq b_2$

.

.

.

$a_{m\,1}x_1 + a_{m\,2}x_2 + ... + a_{m\,n}x_n \leq b$

$\mathbf{X_i} \geq 0$

a, b, c são chamados de parâmetros de modelo e particularmente são chamados de coeficientes da função objetivo ou coeficientes tecnológicos.

RESULTADOS E DISCUSSÃO

O chamado método simplex foi apresentado por George B. Dantzig, um matemático americano, em 1947. Nos anos seguintes o próprio Dantzig e outros matemáticos foram aperfeiçoando-o, principalmente visando torná-lo mais eficiente do ponto de vista computacional.

O método simplex é de fácil implantação nos processos automatizados. Sua aplicação é relativamente fácil, rápida, e permite, com boa margem de segurança, localizar a região ótima, apesar de não oferecer informações claras com respeito ao comportamento das variáveis (EIRAS & ANDRADE, 1996).

No problema do tanque de água abaixo (figura 1) podemos traçar uma definição da quantidade de sal presente em cada instante:

1. Um tanque A contém 50 litros de água em que foram dissolvidos 25 gramas de sal. Um segundo tanque B contém 50 litros de água pura. Bombeia-se líquido para dentro e para fora dos tanques com as seguintes taxas: 3 l/min de água pura para dentro do tanque A, 4l/min da mistura resultante do tanque A para o tanque B, 1l/min da mistura resultante do tanque B volta para o tanque A e 3 L/min dessa mistura sai para fora do tanque B. Determine o sistema de equações diferenciais que descreve a quantidade de sal presente em cada tanque em cada instante, e resolva esse sistema.

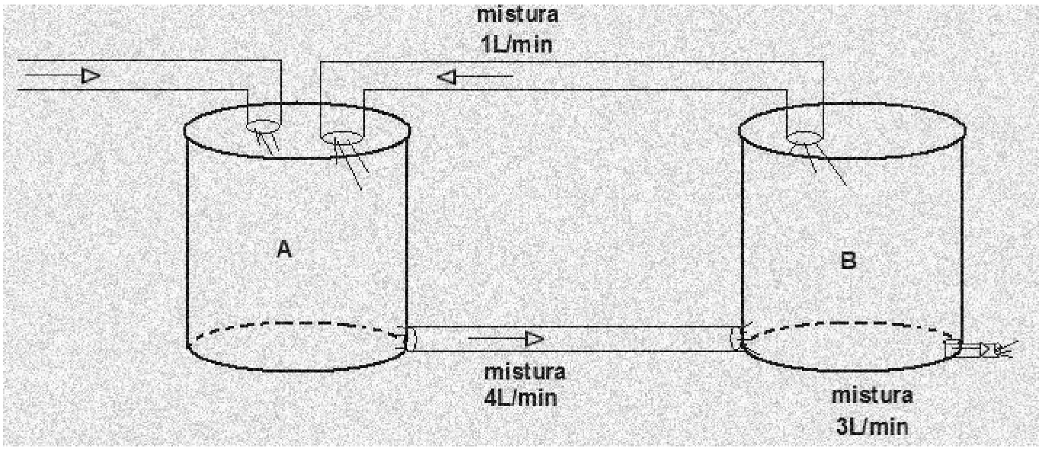

FIGURA 1. TANQUE DE ÁGUA. FONTE: CRYSTHIAN ROBERTO

Sejam f(t) e g(t) as quantidades de sal nos tanques A e B, respectivamente. Assim, a taxa líquida de variação de f(t) para o tanque A é:

Taxa de variação de sal no tanque A = $\frac{\text{taxa de entrada}}{\text{de sal}} - \frac{\text{taxa de saída}}{\text{de sal}}$

$$\frac{df}{dt} = 3l/min \times 0g/l + 1l/min \times \frac{g(t)}{50}\, g/l - 4L/min \times \frac{f(t)}{50}\, g/l$$

Logo, $\frac{df}{dt} = -\frac{4}{50} f(t) + \frac{1}{50} g(t)$ **1º**

Para o tanque B, a taxa líquida de variação de g(t) é:

$$\frac{df}{dt} = 4 \frac{f(t)}{50} - 3 \frac{g(t)}{50}$$

Isto é: $\frac{dg}{dt} = \frac{4}{50} f(t) - \frac{4}{50} g(t)$ **2º**

Comentários sobre as equações 1º e 2º:

A equação 1º é uma equação diferencial (E.D. O) de 1º ordem, que acompanha das condições iniciais f(0) = 25 e g(0) = 0, torna-se um problema de valor inicial (P.V. I) de 1º ordem.
A equação 2º é também uma E.D. O de 1º ordem. Assim, obtemos o sistema linear:

$$\begin{cases} \dfrac{df}{dt} = \dfrac{-4}{50} f(t) + \dfrac{1}{50} g(t) \\ \dfrac{df}{dt} = \dfrac{4}{50} f(t) - \dfrac{4}{50} g(t) \end{cases}$$

Que é acompanhado das condições iniciais f(0) = 25 e g(0) = 0.

$$\begin{cases} f' = -\frac{4}{50}\, f(t) + \frac{1}{50}\, g(t) \\ g' = \frac{4}{50}\, f(t) - \frac{4}{50}\, g(t) \end{cases}$$

Após uma mudança de variável, fazendo:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{-4}{50} & \frac{1}{50} \\ \frac{4}{50} & \frac{4}{50} \end{pmatrix}$$

Resolvemos a equação característica:

$$\begin{vmatrix} -\frac{4}{50} - \lambda & \frac{1}{50} \\ \frac{4}{50} & -\frac{4}{50} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\left(\frac{-4}{50} - \lambda\right)^2 - 4/2500 = 0$$

$$\left|-\frac{4}{50} - \lambda\right| = 2/50$$

$$\frac{-4}{50} - \lambda = \frac{2}{50}, \qquad \lambda = \frac{-4}{50} - \frac{2}{50} = \frac{-6}{50}$$

Ou

$$\frac{-4}{50} - \lambda = \frac{2}{50}, \quad \lambda = \frac{-2}{50}$$

$$\Lambda 1 = \frac{-6}{50} \qquad \text{e} \qquad \lambda 2 = \frac{-2}{50}$$

Assim a solução geral será:

$$\begin{vmatrix} f \\ g \end{vmatrix} = K1 \begin{vmatrix} \frac{1}{50} \\ -\frac{6}{50} - \left(-\frac{4}{50}\right) \end{vmatrix} e^{-6/50t} + K2 \begin{vmatrix} \frac{1}{50} \\ \frac{2}{50} \end{vmatrix} e^{-2/50t}$$

$$f = \frac{K1}{50}\, e^{-\frac{6}{50t}} + \frac{K2}{50}\, e^{-\frac{2}{50t}}$$

$$g = -\frac{2K1}{50}\, e^{-\frac{6}{50t}} + \frac{2K2}{50}\, e^{-\frac{2}{50t}}$$

Das condições iniciais f(0) = 25 e g(0) = 0

$$\begin{cases} \frac{K1}{50} + \frac{K2}{50} = 25 \\ -\frac{2K1}{50} + \frac{2K2}{50} = 0 \end{cases}$$ K**2** = 625 e K**1** = 625

Portanto, f = 12,5 $e^{-\frac{6}{50}t}$ + 12,5$e^{-\frac{2}{50}t}$

g = -25 $e^{-\frac{6}{50t}}$ + 25 $e^{-\frac{2}{50}t}$

A definição proposta permite o cálculo da quantidade de sal no tanque a cada instante; este mesmo modelo pode ser usado para uso da irrigação na agricultura, como no trabalho de JUNIOR et. al., (2008) que através do uso da modelagem computacional para planejamento em agricultura irrigada pode ser verificado reduções significativas na necessidade de irrigação que podem ser obtidas com pequenas reduções no valor presente líquido total máximo, mostrando o potencial da estratégia de planejamento adotado e a visualização para adequação da demanda hídrica nos períodos críticos de disponibilidade de água.

No problema da cooperativa agrícola tem-se o modelo matemático de como elaborar a produção da cooperativa, que segundo MOREIRA et. al., (2012) as cooperativas e suas especificidades não devem ser ignoradas em estudos que visam melhorias na gestão do agronegócio, sobretudo se o interesse for relacionado à eficiência econômica.

2. Uma cooperativa agrícola opera 3 fazendas que possuem produtividade aproximadamente iguais entre si. A produção total da fazenda depende fundamentalmente da área disponível para o plantio e da água de irrigação. A cooperativa procura diversificar sua produção de modo que vai plantar este ano três tipos de cultura em cada fazenda, a saber: milho, arroz e feijão. Cada tipo de cultura demanda por certa quantidade de água. Para reduzir o conflito no uso das colheitadeiras, que são alugadas pela cooperativa, estabeleceram-se limites de área de produção dentro de cada tipo de cultura. Para evitar a concorrência entre os cooperados, acordou-se que a produção de área cultivada seja a mesma para cada uma das fazendas. As tabelas 2.1 e 2.2 resumem os dados tecnológicos. pede-se a elaboração de um programa de produção que defina a área de cultura da produção da cooperativa.

Tabela 1. Água disponível e área de cultivo por fazenda

Fazenda	Área total para cultivo(acres)	Água disponível(litros)
1	400	1800
2	650	2200
3	350	950

Tabela 2. Consumo de água, área de cultivo e lucro por cultura

cultura	área máxima de cultivo (acres)	consumo de água(litros por acre)	lucro(R$/acre)
milho	660	5,5	5000
arroz	880	4	4000
feijão	400	3.5	1800

1-Fazenda 1 M: Milho
2-Fazenda 2 A: arroz
3-Fazenda 3 F: feijão
Variáveis de decisão: **xij**

Onde i = 1, 2, 3 e j = M, A, F

(Maximizar)
Z = 5000(**x1M** + **x2M** + **x3M**) + 4000(**x1A** + **x2A** + **x3A**) + 1800(**x1F** + **x2F** + **x3F**) – soma dos custos em cada cultura em cada fazenda.

Fazenda 1: 5,5**x1M** + 4**x2M** + 3,5**x3M** ≤ 1800
Fazenda 2: 5,5**x1M** + 4**x2M** + 3,5**x3M** ≤ 2200
Fazenda 3: 5,5**x1M** + 4**x2M** + 3,5**x3M** ≤ 950

Restrições associadas ao plantio por cultura

Milho: **x1M** + **x2M** + **x3M** ≤ 660
Arroz: **x1A** + **x2A** + **x3A** ≤ 800
Feijão:**x1F** + **x2F** + **x3F** ≤ 400

Como a proporção de área cultivada deve ser a mesma em cada fazenda temos:

$$\frac{X1M + x1A + x1F}{100} = \frac{x2M + x2A + x2F}{650} = \frac{x3M + x3A + x3F}{350}$$

Que equivale a:

X1M + **x1A** + **x1F =** 400 P
x2M + **x2A** + **x2F =** 650 P
x3M + **x3A** + **x3F =** 350 P

onde P significa “partes do total”, é uma constante da proporcionalidade direta de área cultivada em cada fazenda.

Restrições á não negatividade:

$\mathbf{Xim} \geq 0$, $\mathbf{XiA} \geq 0$, $\mathbf{XiF} \geq 0$, $i = 1, 2, 3$.
Portanto nosso modelo de programação linear é maximizar.

(Max) $\mathbf{Z} = 5000(\mathbf{x1M} + \mathbf{x2M} + \mathbf{x3M}) + 4000(\mathbf{x1A} + \mathbf{x2A} + \mathbf{x3A}) + 1800(\mathbf{x1F} + \mathbf{x2F} + \mathbf{x3F})$ – soma dos custos em cada cultura em cada fazenda.

s.a

$5{,}5\mathbf{x1M} + 4\mathbf{x2M} + 3{,}5\mathbf{x3M} \leq 1800$
$5{,}5\mathbf{x1M} + 4\mathbf{x2M} + 3{,}5\mathbf{x3M} \leq 2200$
$5{,}5\mathbf{x1M} + 4\mathbf{x2M} + 3{,}5\mathbf{x3M} \leq 950$
$\mathbf{x1M} + \mathbf{x2M} + \mathbf{x3M} \leq 660$
$\mathbf{x1A} + \mathbf{x2A} + \mathbf{x3A} \leq 800$
$\mathbf{x1F} + \mathbf{x2F} + \mathbf{x3F} \leq 400$

com $\mathbf{xij} \geq 0$, onde $i = 1, 2, 3$. E $j = M, A, F$.

Considerações sobre este problema:

Ao passar para a forma canônica, deve-se incorporar ao problema as condições de proporcionalidade de área cultivada em cada fazenda.

O problema pode ser resolvido pelo método simplex, desde que seja completado com as informações sobre os custos envolvidos, que incluem os custos fixos, custos variáveis e operacionais sobre o problema.

Uma forma simples de considerar esses custos é atribuir um valor fixo para representar todo o custo envolvido, porém, isso deve ser feito com muito cuidado, de acordo com a experiência do consultor que vai tratar a variável como um "custo total" ou "custo médio" não levando em consideração as variações dos gastos ao longo do período.

Um caso onde há interesse em enfatizar a variação dos custos é mais complexa.

Problemas como este onde muitas variáveis são envolvidas, são resolvidos com a ajuda de um software específico de programação linear, pois a solução manual é demasiadamente longa ou até mesmo impossível, devido ao grande número de interações que isso requer, não compensando o dispendio de tempo desnecessário e até mesmo risco de nunca conseguir chegar ao ótimo devido a um possível erro em alguma das interações.

CONCLUSÃO

A modelagem matemática é uma técnica de otimização que proporciona determinar pontos máximos e mínimos da curva do ponto ótimo. É uma metodologia aceitável e de otimização em várias atividades, principalmente nas agroindústrias, permitindo estimar a receita de uma empresa como também à produtividade máxima.

O trabalho tem como base o implemento da matemática aplicada com a lógica agroindustrial servindo como referência inicial para futuros consultores do ramo agroindustrial.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, L. M. W. & PALHARINI, B. N. Os Mundos da Matemática em Atividades de Modelagem Matemática. **Bolema** vol.26 nº.43, Rio Claro, Ago. 2012.

ALBUQUERQUE, L. L., ALMEIDA, A. T. e CAVALCANTE C. A. V. I. Aplicabilidade da programação matemática multiobjetivo no planejamento da expansão de longo prazo da geração no brasil. **Pesquisa Operacional**, v.29, n.1, p.153-177, Janeiro a Abril de 2009.

EIRAS, S; ANDRADE, J. C. O uso do simplex modificado como estratégia de otimização em química analítica. **Química Nova**, v.19, n.1, p. 25-29, 1996.

JÚNIOR, J. C. B. F.; FERREIRA, P. A; ANDRADE, C. L. T.; DUNKHORST, B. H. Modelagem computacional para planejamento em agricultura irrigada. Parte I: descrição geral e programação linear. **Eng. Agríc**. vol.28 nº.3 Jaboticabal Julh/Set. 2008.

MEYER, J. F. C. A.; CALDEIRA, A. D.; MALHEIROS A. P. S. Modelagem em Educação Matemática. Belo Horizonte: **Autêntica**, 2011.

MOREIRA, V. R.; SILVA, C. L.; MORAES, E. A.; PROTIL, R. M. O cooperativismo e a gestão dos riscos de mercado: análise da fronteira de eficiência do agronegócio paranaense. **Rev. Econ. Sociol. Rural** vol.50 nº1 Brasília Jan./Mar. 2012.

MUNHOZ, J. R. **Um modelo baseado em programação linear e programação de metas para análise de um sistema de produção e distribuição de suco concentrado congelado de laranja**. 2000. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Produção)-Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, 2000.

MUNHOZ, J. R. **Otimização no planejamento agregado de produção em indústrias de processamento de suco concentrado congelado de laranja.** 2009. Tese (Doutorado em Engenharia de Produção)-Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, 2009.

MUNHOZ, J. R. e MORABITO, E. Otimização no planejamento agregado de produção em indústrias de processamento de suco concentrado congelado de laranja. **Gest. Prod**., São Carlos, v. 17, n. 3, p. 465-481, 2010.

MUNHOZ, José Renato; MORABITO, Reinaldo. Uma abordagem de otimização robusta no planejamento agregado de produção na indústria cítrica. **Prod.**, São Paulo, 2012.

PUCCINI, A.L.; PIZZOLATO, N.D. Programação linear. São Paulo: **Livros Técnicos Científicos**, 1987. 284p.

SILVA, R.A. DA. **Emprego do método simplex supermodificado como estratégia de otimização para respostas combinadas: Estudo de casos no**

desenvolvimento de sistemas alimentares. Londrina 1999, 61p. Dissertação de Mestrado. Universidade Estadual de Londrina 1999 (UEL).

SILVA, R. A., BORSATO D. , SILVA R. SÉRGIO F. Método simplex supermodificado como estratégia de otimização para respostas combinadas em sistemas alimentares. **Ciência Tecnologia dos Alimentos**. Vol. 20 nº3. Campinas Setembro/2000.